

# Schalentheorie oder Ringtheorie?

## Ein Beitrag zur Dimensionierung des Trommelmantels

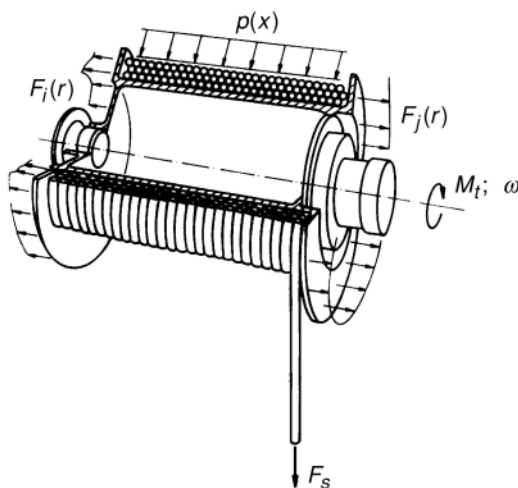
Mupende, I.

*Die Seiltrommel ist ein wichtiges Bauelement der Fördertechnik. Für ihre Auslegung gibt die Norm nur wenige Hinweise, s.d. in der Regel vereinfachte Theorien und das Erfahrungswissen des Konstrukteurs zur Anwendung kommen. Mit dieser Vorgehensweise werden nicht selten die Beanspruchungen in der Trommel unterschätzt, was zur Plastifizierung des Mantels oder zum kompletten Ausfall der Trommel während des Betriebs führen kann.*

*Literature and technical standard do not give enough details about the calculation from hoisting drum. In many cases the dimensioning is done according to the company experiences and with simplified theorie. This underestimate the real stress concentration and leads in many cases to plastification of the drum body or a total damage of the hoisting drum.*

### 1 Die Seiltrommel

Die Seiltrommel ist eines der Maschinenelemente, welches die Drehbewegung eines Antriebselementes in eine Längsbewegung mittels eines Seiles umwandelt. Im Unterschied zur Treibscheibenwinde, speichert die Seiltrommel gleichzeitig die gesamte Seillänge auf ihrem Mantel. Dies kann bei sehr großen Nutzlängen in mehreren Lagen erfolgen. Das seitliche Abrutschen des Seilpaketes wird durch die Bordscheiben verhindert.



**Bild 1:** Schnittdarstellung einer Seiltrommel

Im Vergleich zu andern mechanischen Systemen, wie Spindeln und Zahnstangen, welche auch die Rotationsbewegung in eine Linearbewegung umwandeln, ist die Seiltrommel sehr kompakt und kann eine sehr große Nutzlänge anbieten. Aufgrund dieses Vorteils ist sie in vielen Bereichen aber besonders in der Fördertechnik (z.B. im Kran, Aufzugsbau) weit verbreitet.

### 1.1 Auslegung des Seiles und der Seiltrommel

Basierend auf den Kundenanforderungen erfolgt die Seilauswahl und Auslegung nach Normvorschriften (DIN 15020, ISO 4308 - 4309, VDI 2358 und FEM Sektion I und IX) und mit Hilfe von Seilherstellerkatalogen. Diese bieten ausreichende Informationen, um ein für den Anwendungsfall geeignetes Seil auszuwählen.

Für die Auslegung der Trommel stehen dem Konstrukteur sehr wenige Informationen zu Verfügung – so beispielsweise das in DIN 15020, ISO 8087 empfohlene Verhältnis von Trommelgrunddurchmesser  $D_g$  zu Seildurchmesser  $d_s$ . Weitere Angaben, z.B. zur Dimensionierung der Mantelwandstärke  $h$  oder der Bordscheibendicke  $h_b$  insbesondere bei mehrlagig bewickelten Seiltrommeln, sind nicht verfügbar.

In der Praxis erfolgt die Auslegung der Trommel nach der Firmenphilosophie und den Erfahrungen der Konstrukteure. Die Seiltrommel wird in ihre Einzelkomponenten, d.h. Bordscheiben, Mantel, Kopplungsring und Stützscheiben zerlegt und jede Komponente wird einzeln mit vereinfachten mathematischen Ansätzen ausgelegt. In vielen Fällen werden jedoch nur die Hauptkomponenten, d.h. der Mantel nach der Ring- oder der Schalentheorie und die Bordscheiben nach der Biegebalken- oder der symmetrisch belasteten Plattentheorie berechnet.

### 2 Die Schalentheorie für die Seiltrommel

Die geometrische Gestalt des Trommelmantels genügt in der Regel den Kriterien für die Anwendung der Schalentheorie. Dies bedeutet, dass das Ver-

hältnis der Wanddicke  $h$  zum Mittelflächenradius  $a$  Werte kleiner als 0,2 aufweisen muss. Gängige Seiltrommelkonstruktionen im Bereich des Kranbaus besitzen ein Wanddicken/Radiusverhältnis zwischen  $0,05 \leq h/a \leq 0,15$ . Dieses verringert sich für Bergbautrommeln bis zu einem Wert von 0,01.

Fall	Verhältnis $h/a$
Gültigkeit der Schalentheorie	$h/a \leq 0,2$
Sehr dicke Schalen (Rohre)	$0,1 \leq h/a \leq 0,2$
Dicke Schalen	$0,04 \leq h/a < 0,1$
Sehr dünne Schalen	$h/a < 0,005$

**Tab. 1:** Einteilung der Kreiszylinderschalen

Schalen sind Flächentragwerke mit einfach oder doppelt gekrümmter Mittelfläche. Für ihre Berechnung werden zwei Theorien angewendet:

- die Membrantheorie und
- die Biegetheorie.

Bei der Membrantheorie wird ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt. Die Spannungen wirken nur parallel zur Schalenmittelfläche. Eine sprunghafte Änderung der Geometrie (z.B. Ankopplung der Bord- und Stützscheiben bei Seiltrommeln), Behinderungen durch die Lagerung der Schale oder Kräftekonzentrationen senkrecht zur Schalenmittelfläche stören den Membranspannungszustand und führen zur Anwendung der Biegetheorie. Diese muss auch dann angewendet werden, wenn außer den tangential zur Mittelfläche der Schale wirkenden Längskräften zusätzlich Querkkräfte und Biegemomente sowie Drillmomente auftreten. Die Spannungen derartig beanspruchter Biegeschalen sind nicht gleichmäßig über der Schalendicke verteilt.

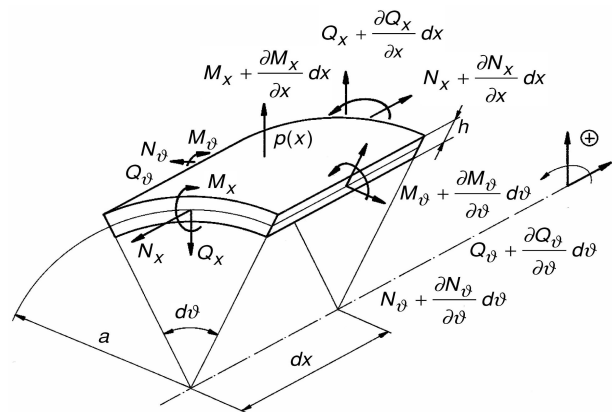
Für die Anwendung der Schalentheorie auf die Trommeldimensionierung gelten folgende Annahmen:

1. Der Druck auf den Trommelkörper wird als gleichmäßig verteilte Flächenbelastung  $p(x)$  über Umfang und Länge am Ende der Aufwicklung angenommen.
2. Das Material der Trommel muss den Grundbedingungen der Elastizität genügen, das heißt, es muss homogen und isotrop sein und seine Elastizität linear entsprechend dem Hooke'schen Gesetz ändern.

3. Alle Punkte, die vor der Verformung auf einer Normalen zur Mantelmittelfläche liegen, sollen sich auch nach der Verformung auf einer Normalen zur verformten Mittelfläche befinden. Damit wird die Schubverformung im Mantel vernachlässigt.
4. Die Verschiebung senkrecht zur Mantelfläche ist im Vergleich zur Manteldicke klein, ihre erste Ableitung ist sehr viel kleiner als eins. Dies erlaubt, im Rahmen der linearen Theorie, nur lineare Glieder zu berücksichtigen. Die Richtigkeit des Superpositionsprinzips wird durch diese Annahme gewährleistet.
5. Die relativen Abstände von Punkten innerhalb des Mantels werden nicht durch die Verformung verändert. Dies gilt insbesondere für den Abstand von Punkten zur Mittelfläche. Diese Annahme ist wichtig für die Aufstellung der Verzerrungs- und Verschiebungsbeziehungen und der Berechnung der Biegespannungen.
6. Die Manteldicke ist im Vergleich zu allen anderen Abmessungen klein. Die Spannungsverteilung wird linear über der Dicke angenommen.
7. Die zur Mittelfläche senkrecht wirkenden Normalspannungen sind vernachlässigbar.

## 2.1 Schalentheorie 1. Ordnung

Mit der Annahme von kleinen Verschiebungen in radialer Richtung können die Gleichgewichtsbedingungen des Schalenelementes im unverformten Zustand hergeleitet werden. Man spricht bei dieser Vorgehensweise von der Theorie 1. Ordnung. Hier wird der Einfluss der Formänderungen auf den Kräfteverlauf vernachlässigt.



**Bild 2:** Definition der Schnittkräfte am unverformten Schalenelement

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung des Gleichgewichtszustandes beschreibt die Verformung  $w(x)$  des Mantels. Ihr Verlauf ist abhängig von den Randbedingungen.

$$w(x) = C_1 \cosh \chi x \cos \chi x + C_2 \sinh \chi x \sin \chi x + C_3 \cosh \chi x \sin \chi x + C_4 \sinh \chi x \cos \chi x + \frac{1}{4\chi^4 K} \left( p(x) - \frac{\nu}{a} N_x \right)$$

mit:

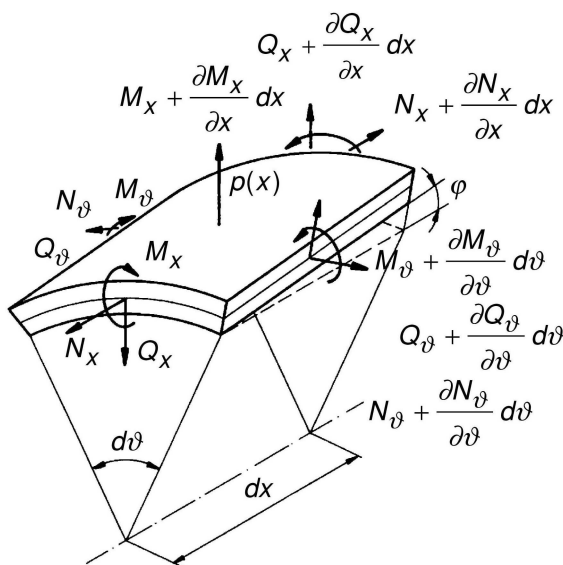
$\chi$  : Abklingkonstante oder Behälterkennzahl

$\nu$  : Querkontraktionszahl

$K$  : Biegesteifigkeit des Mantels

## 2.2 Schalentheorie 2. Ordnung

Die Theorie der 1. Ordnung setzt voraus, dass die radiale Verformung sehr gering im Vergleich zur Schalendicke ist. Diese Annahme trifft für das Verhalten dicker und sehr dicker Schalen mit elastischem Werkstoffverhalten besonders gut zu. Für dünne und sehr dünne Schalen oder bei plastischem Werkstoffverhalten ist diese Annahme nur bedingt zutreffend. Ist das Verformungsverhalten nicht eindeutig bekannt, sollte die Theorie der 2. Ordnung herangezogen werden. Die Theorie der 2. Ordnung betrachtet den Gleichgewichtszustand an einem verformten Schalelement. Dabei wird die Neigung  $\varphi$  des Schalelementes unter der äußeren Belastung berücksichtigt.



**Bild 3** Schnittkräfte am verformten Schalelement

Aus dem Gleichgewichtszustand ergibt sich die Mantelverformung  $w(x)$  für  $N_x < 4\chi^2 K$ :

$$w(x) = C_1 \cosh \alpha x \cos \beta x + C_2 \sinh \alpha x \sin \beta x + C_3 \cosh \alpha x \sin \beta x + C_4 \sinh \alpha x \cos \beta x + \frac{1}{4\chi^4 K} \left( p(x) - \frac{\nu}{a} N_x \right)$$

mit:

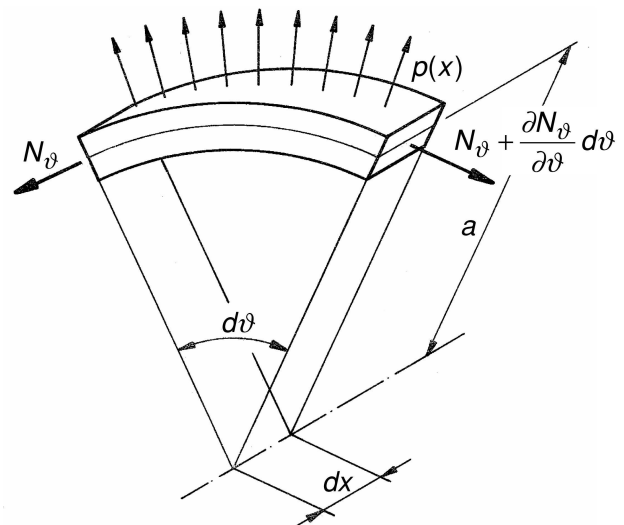
$$\alpha = \sqrt{\chi^2 - \frac{N_x}{4K}} \text{ und } \beta = \sqrt{\chi^2 + \frac{N_x}{4K}}$$

## 2.3 Mantel als Zusammensetzung von Ringelementen

Der Verlauf und die Höhe der Radialverformung des Mantels sind von den Randbedingungen abhängig, welche die Bestimmung der Konstante  $C_i$  ermöglichen. Für den Mantel sind vier Lagerungen möglich:

1. Freie Lagerung
2. Freier Rand
3. Elastischer Rand
4. Fest eingespannter Rand

Bei einem ungelagerten Mantel (freie Ränder) ergeben sich keine Biegebeanspruchungen unter dem äußeren konstanten Druck, wenn die Wandstärke als konstant vorausgesetzt wird. Der Mantel kann in diesem Fall als eine Zusammensetzung von mehreren Ringen unter Radialdruck betrachtet werden. Die Beanspruchungen ähneln denen eines Rings unter Radialdruck.



**Bild 4** Schnittkräfte eines ungelagerten Mantels

Im Mantel werden die Radialverformungen  $w(x) = w_0$  und die Tangentialspannung  $\sigma_\theta = \sigma_0$  als konstant über der gesamten Länge angenommen.

$$\sigma_0 = \sigma_\theta = \frac{p(x) \cdot a}{h}$$

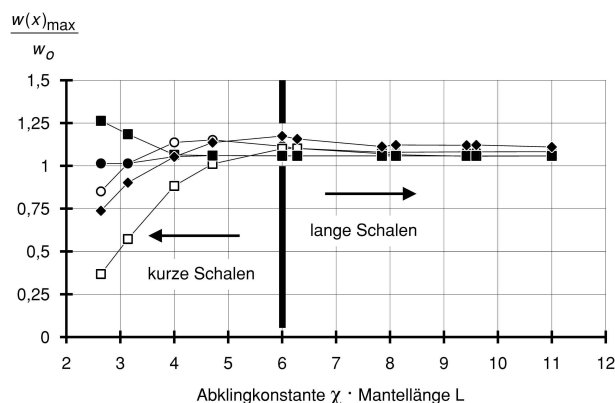
$$w_0 = w(x) = \frac{a^2}{E \cdot h} p(x)$$

### 3 Vergleich der 1. und der 2. Schalentheorie sowie der Ringtheorie

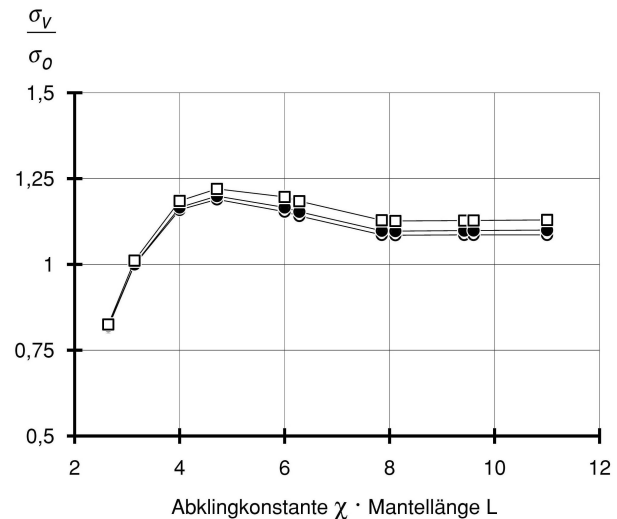
Vergleichsrechnungen mit der Theorie 1. Ordnung und 2. Ordnung zeigen für den Mantel der Seiltrommel nur sehr geringe Abweichungen untereinander:

- Für beide Theorien ist der Unterschied zwischen den Ergebnissen mit bzw. ohne Berücksichtigung der Axialkraft kleiner als 1%.
- Die Berechnungswerte beider Theorien sind identisch ohne Berücksichtigung der Axialkraft ( $N_x = 0$ ) und
- Mit Berücksichtigung der Axialkraft ( $N_x \neq 0$ ) beträgt der Unterschied zwischen beiden Theorien 0,002%.

Die Untersuchungen haben weiterhin gezeigt, dass die Analyse des Verformungsverhaltens des Trommelmantels mit der Schalentheorien stark von den Randbedingungen und der Schalenlänge abhängig ist. Die berechneten Beanspruchungen sind in jedem Fall größer als die mit der Ringtheorie, d.h. der ungelagerten Schale, ermittelten Werte.



**Bild 5** Verlauf der Verformungen des Mantels in Abhängigkeit von der Randbedingungen und der reduzierten Länge (Abklingkonstante  $\chi \cdot \text{Mantellänge } L$ )



**Bild 6** Vergleichsspannung im Trommelmantel bezogen auf die Spannung in einem Ring in Abhängigkeit von der Mantellänge und der Abklingkonstante

### 4 Zusammenfassung

Die Auslegung des Trommelmantels mit der Ringtheorie kann für Seiltrommeln mit einer kurzen reduzierten Länge ( $\chi \cdot L$ ) zu kritischen Ergebnissen führen. Die Unterschätzung der Beanspruchungen kann bis zu 25% betragen. Dies kann bei nicht ausreichenden Sicherheitsannahmen zur Plastifizierung oder zu unzulässig hohen Axial- und Radialverformungen des Mantels führen. Die Dimensionierung des Mantels mit der Schalentheorie ist die geeignete Vorgehensweise, um Seiltrommeln ohne sehr hohe Sicherheitsfaktoren auszulegen. Dabei genügt die Theorie der 1. Ordnung für die Mantelauslegung üblicher Seiltrommeln (Kran- und Aufzugsbereich). Die Axialkraft der Bordscheiben kann ohne große Fehler in der Beanspruchung des Mantels vernachlässigt werden.

### 5 Literatur

- /1/ Dietz, P: Ein Verfahren zur Berechnung ein- und mehrlagig bewickelter Seiltrommeln. Dissertation, TH Darmstadt, Darmstadt, 1971
- /2/ Mupende, I: Beanspruchungs- und Verformungsverhalten des Systems Trommelmantel – Bordscheiben bei mehrlagig bewickelten Seiltrommeln unter elastischem und teilplastischem Werkstoffverhalten. Dissertation, TU Clausthal, Cuvillier Verlag Göttingen, 2001